Rappels : $A \Longrightarrow B$

Je peux choisir x ?

	Dans les hypothèses ou un résultat déjà montré	Dans ce qu'il faut montrer
$\forall x$	✓	✗
$\exists x$	✗	✓

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \ : \ \forall \varepsilon>0, \ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall n\geq N, \ |x_n-\ell|\leq\varepsilon$$

tolérance aussi petite que je veux

au bout d'un certain rang

la distance entre les éléments de ma suite et ℓ est plus petite que la tolérance

(x_n) donnée :

<u>DdR</u> : tout le bagage de calcul de limites que vous avez

<u>RdP</u> : $|x_n-\ell|\leq\varepsilon \Longleftarrow n\geq$ bidule

<u>Preuve</u> : Soit $\varepsilon>0$ quelconque. Posons $N=\lceil$bidule$\rceil$

Exemple 3.9 (suite)

(iv) Soit $0 < \alpha < 1$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite géométrique définie par $x_n = \alpha^n$

Ddr $\underbrace{\alpha}_{0<\alpha<1}^n \longrightarrow 0$ $\qquad \alpha^n = e^{n \cdot \log(\alpha)}$ <0

RdP $|x_n - 0| \leq \varepsilon \qquad \alpha^n \leq \varepsilon$

$n \log(\alpha) \leq \log(\varepsilon) \qquad n \geq \dfrac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)}$

<0 ($0<\varepsilon<1$) $\qquad \geq 0$ ($1 \leq \varepsilon$) $\qquad \leq 0$

Preuve de $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On distingue 2 cas:

Cas 1 $\varepsilon \geq 1$. Posons $N = 0 \in \mathbb{N}$ et soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$$|x_n - 0| = \alpha^n \leq 1 = \varepsilon$$

Cas 2 $0 < \varepsilon < 1$: Posons $N = \left\lceil \dfrac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil$

et soit $n \geq N$ quelconque.

Alors,

$$|x_n| = \alpha^n = e^{n\log(\alpha)} \underset{\substack{n\geq N\\ \log(\alpha)<0}}{\leq} e^{N\log(\alpha)}$$

$$= e^{\left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil \cdot \log(\alpha)} \leq e^{\frac{\log(\varepsilon)}{\cancel{\log(\alpha)}} \cdot \cancel{\log(\alpha)}}$$

$$= e^{\log(\varepsilon)} = \varepsilon.$$

ε étant quelconque, on a le résultat

<u>Proposition 3.10</u> (Unicité de la limite)

Si une suite converge, la limite est unique.

<u>Proposition 3.11</u>

Une suite convergente est bornée

<u>Preuve</u>

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. Montrons que

$$\exists l\in\mathbb{R} \text{ tq } \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall n\geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists C>0 \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N}, |x_n| \leq C$$

Soit donc ℓ tq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Posons $\varepsilon = \cancel{1}\ 14$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - \ell| \leq \varepsilon = \cancel{1}\ 14$$

⚠ un nombre fini d'élém.
⇒ max existe

Posons $c = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |\ell| + \cancel{1}\ 14\}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

<u>Cas 1</u> : $n < N$

Vu que $n, N \in \mathbb{N}$, on a donc $n \leq N-1$

Ainsi, $|x_n| \in \{\underline{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|}, |\ell| + \cancel{1}\ 14\}$

donc $|x_n| \leq \max\{|x_0|, \ldots, |x_{N-1}|, |\ell| + \cancel{1}\ 14\} = c$

<u>Cas 2</u> : $n \geq N$

Feinte du Loup

$\forall x, y \quad x = x - y + y$

On a

$$|x_n| = |x_n - \ell + \ell| \leq \underbrace{|x_n - \ell|}_{\leq \varepsilon \text{ car } n \geq N} + |\ell|$$

$$\leq \varepsilon + |\ell|$$

$$\leq \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |\ell| + \cancel{\varepsilon}\ 14\} = c$$

n étant quelconque, on a le résultat ∎

<u>Définition 3.12</u> (suite divergente)

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que (x_n) <u>diverge</u> ou est <u>divergente</u> si elle n'est pas convergente :

$$\neg\left((x_n) \text{ converge} \right)$$

$$\neg\left(\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \ |x_n - \ell| \leq \varepsilon \right)$$

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tq } |x_n - \ell| > \varepsilon.$$

Exemple 3.13

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$, la suite définie par $x_n = (-1)^n$. Alors, (x_n) est divergente

Ab absurdo : $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ comme ci-dessus, Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq N$, $|x_n - \ell| \leq \frac{1}{2}$

Remarquons que $|x_N - x_{N+1}|$
$= |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N + (-1)^N|$
$= 2|(-1)^N| = 2.$

De plus, vu que $N, N+1 \geq N$ on conclut

$$2 = |x_N - x_{N+1}| = |x_N - \ell + \ell - x_{N+1}|$$

$$\leq \underbrace{|x_N - \ell|}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{|x_{N+1} - \ell|}_{\leq 1/2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \lightning$$

Contradiction, donc (x_n) diverge.

<u>Définition 3.14</u>

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, une suite. On dit que

(i) (x_n) <u>tend vers l'infini</u> si

$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $x_n \geq M$.

On note alors $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

(ii) (x_n) tend vers <u>moins l'infini</u> si

$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $x_n \leq -M$

On note alors $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$

Remarque 3.15

Une suite qui tend vers l'infini ou moins l'infini n'est pas bornée.
En particulier, elle diverge.

Exemples 3.16

(i) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par
$x_n = n$. Alors, montrons que
$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

RdP : $x_n \geq M$, $n \geq M$
$\to$ $N = \lceil M \rceil$

Soit $M \geq 0$ quelconque. Posons
$N = \lceil M \rceil$. Soit $n \geq N$ quelconque. Alors,
$x_n = n \geq N = \lceil M \rceil \geq M$.
Vu que n est quelconque, on a le résultat

(ii) Soit $\alpha > 1$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique définie par $x_n = \alpha^n$.

Montrons que $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

RdP : $x_n \geq M \iff \alpha^n \geq M$

$n \cdot \log(\alpha) \geq \log(M)$

$n \geq \dfrac{\log(M)}{\log(\alpha)}$

Si $0 \leq M \leq 1$, $N = 0$

si $M > 1$, $N = \left\lceil \dfrac{\log(M)}{\log(\alpha)} \right\rceil$

Soit $M \geq 0$ quelconque. On distingue 2 cas :

Cas 1 : $0 \leq M \leq 1$. Posons $N = 0$.

Soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$x_n = \alpha^n \geq 1^n = 1 \geq M$.

Vu que n est quelconque, on a le résultat dans ce cas.

Cas 2 : $M > 1$. Posons $N = \left\lceil \dfrac{\log(M)}{\log(\alpha)} \right\rceil$

Soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$$x_n = \alpha^n = e^{n \cdot \log(\alpha)} \geq e^{N \cdot \log(\alpha)}$$

$$= e^{\left\lceil \frac{\log(M)}{\log(\alpha)} \right\rceil \cdot \log(\alpha)} \geq e^{\frac{\log(M)}{\log(\alpha)} \cdot \log(\alpha)}$$

$$= e^{\log(M)} = M.$$

Vu que n est quelconque, on a le résultat dans ce cas.

La combinaison des deux cas est le résultat voulu.

(iii) Plus généralement, soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante non-majorée. Alors, $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

$\neg \left(\exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq 0, \ x_n \leq M \right)$

$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists n \geq 0, \text{ tq } x_n > M.$

<u>Aus</u>: $\forall M \geq 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \ x_n \geq M$

Soit $M \geq 0$ quelconque. Soit $\bar{n} \geq 0$ tq $x_{\bar{n}} > M$. Posons $N = \bar{n}$

Soit $n \geq N$ quelconque.

$x_n \geq x_N = x_{\bar{n}} > M$.

Vu que n est quelconque, on a le résultat.

(v) Plus généralement si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite non-minorée et décroissante, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

(vi) ⚠ pas toutes les suites qui tendent vers ∞ ou $-\infty$ sont monotones.

Par exemple $x_n = n + (-1)^n$. Alors,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Proposition 3.17 Propriétés algébriques des limites.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites et $a, b \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

Alors,

(i) la suite $z_n = x_n + y_n$ converge vers $a+b$

(ii) La suite $z_n = x_n \cdot y_n$ converge vers $a.b$.

(iii) Si $b \neq 0$, la suite $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ converge vers $\frac{a}{b}$

(iv) Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $x_n \leq y_n$ alors, $a \leq b$.

Preuve de (ii)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$ $|x_n - a| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$, $|y_n - b| \leq \varepsilon$

Par la proposition 3.11

$\exists C \geq 0$ tq $\forall n \geq 0$, $|x_n| \leq C$

À montrer : $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$,

$|z_n - a\cdot b| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon>0$ quelconque. Par la prop. 3.11,
Soit $C \geq 0$ tq $\forall n \geq 0$, $|x_n| \leq C$.

Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$
tq $\forall n \geq N_1$, $|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{C+|b|}$

Soit donc N_1 comme ci-dessus.

Par définition de $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$
tq $\forall n \geq N_2$, $|y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{C+|b|}$

Soit donc N_2 comme ci-dessus.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$

Soit $n \geq N$ quelconque.

$$|z_n - a\cdot b| = |x_n \cdot y_n - a\cdot b|$$

$$= |x_n y_n - x_n\cdot b + x_n \cdot b - a\cdot b|$$

$$\leq |x_n\cdot y_n - x_n b| + |x_n \cdot b - a\cdot b|$$

$$= \underbrace{|x_n|}_{\leq C} \cdot \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{\varepsilon}{C+|b|}} + |b| \cdot \underbrace{|x_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{C+|b|}} \quad (n \geq N \geq N_1)$$

(car $n \geq N \geq N_2$)

$$\leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C+|b|} + |b| \frac{\varepsilon}{C+|b|}$$

$$= \varepsilon \frac{C+|b|}{C+|b|} = \varepsilon.$$

n étant quelconque, on a le résultat voulu. $\blacksquare$

<u>Exemples 3.18</u>

(i) Déterminons la limite de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

On a vu à l'exemple 3.9 que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Ainsi, $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}$

$= 0 + 0 = 0$

(ii) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ deux suites convergentes. Montrons que $\lim_{n \to \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \cdot \lim_{n \to \infty} x_n$

$+ \beta \lim_{n \to \infty} y_n$

Posons deux suites constantes $\alpha_n = \alpha$, $\beta_n = \beta$. On a vu (exemple 3.9)

$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$ & $\lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta$.

Ainsi,

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha \cdot x_n) = \lim_{n \to \infty} (\alpha_n \cdot x_n) \overset{(ii)}{=} \left(\lim_{n \to \infty} \alpha_n\right)\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Idem, $\lim_{n \to \infty} (\beta \cdot y_n) = \beta \cdot \lim_{n \to \infty} y_n$.

Pour finir,

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) \overset{(i)}{=} \lim_{n \to \infty} (\alpha \cdot x_n) + \lim_{n \to \infty} (\beta \cdot y_n)$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n \to \infty} x_n + \beta \cdot \lim_{n \to \infty} y_n$$